



Ε

Ν.

Ε.

Δ

Ι.

Μ.

Πανελλήνιο Συνέδριο
Ένωσης
Ερευνητών
Διδακτικής των Μαθηματικών

*Τυπικά και άτυπα μαθηματικά:
χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιδράσεις
στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης*

Πρακτικά Συνεδρίου
23-25 νοεμβρίου 2007

τυπωθήτω

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Σχολή Επιστημών της Αγωγής
Αλεξανδρούπολη
carne2007.edu.duth.gr

5. «Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα ...;». Όψεις της κατανόησης των παιδιών για τους ρητούς αριθμούς και το συμβολισμό τους
Ξ. Βαμβακούση, Σ. Βοσνιάδου
6. Η αισθητοποίηση της έννοιας του αριθμού από παιδιά προσχολικής ηλικίας
Β. Βασιλείου, Α. Παναούρα
7. Καθημερινές καταστάσεις και μαθηματικά προβλήματα
Μ. Μπαρτζάκη, Β. Γεωργιάδου-Καμπουρίδη
8. Κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας από τα μικρά παιδιά: δυνατότητες και δυσκολίες
Δ. Δεσλή
9. Πεποιθήσεις και στάσεις των μαθητών του Λυκείου για τη μάθηση και τη μάθηση των μαθηματικών
Ε. Καπετανάς, Θ. Ζαχαριάδης
10. Δραστηριότητες μοντελοποίησης για την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος
Μ. Κάττου, Ν. Μουσουλίδης
11. Οι «ίδιο Α-ίδιο Β» λύσεις των μαθητών της Β' Γυμνασίου στη σύγκριση περιμέτρου και εμβαδού σχημάτων
Κ. Ματθαίου
12. Τα τυπικά μορφοποιημένα κλάσματα στα νέα βιβλία της δημοτικής
Α. Μπούφη, Φ. Σκαφτούρου
13. Κίνητρα, γνωστική ανάπτυξη των μαθητών και πρακτικές των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά
Μ. Παντζιαρά, Γ.Ν. Φιλίππου
14. Γνωστικά στυλ και επίδοση σε προβλήματα μέτρησης και γεωμετρίας
Δ. Πίττα-Πανταζή, Κ. Χρίστου
15. Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης στην τρισδιάστατη γεωμετρία
Μ. Πιτάλης, Ν. Μουσουλίδης, Κ. Χρίστου

ΗΜΕΡΙΝΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Μ. Μπαρτζάκλη, Β. Γεωργιάδου-Καμπουρίδη
Πανεπιστήμιο Πατρών, ΥΠΕΠΘ
mbartzakli@sch.gr, bkabouridis@gmail.com

Η παρούσα εργασία αναλύει δεδομένα έρευνας στην οποία έλαβαν μέρος οι μαθητές της Δ τάξης δημοτικού δημοτικού σχολείου καταγράφοντας σε ημερολόγιο μαθηματικές καταστάσεις που αναγνώρισαν στις καθημερινές τους δραστηριότητες κατά τη διάρκεια των διακοπών τους. Η ανάλυση των ημερολογίων των μαθητών ανέδειξε τρεις τύπους ως προς τη μορφή με την οποία οι μαθητές κατέγραψαν τις μαθηματικές καταστάσεις: απλά λεκτικά προβλήματα με σκέψη, πράξεις και απάντηση, αφηγήσεις με ή χωρίς πράξεις και ανοιχτές μαθηματικές καταστάσεις με ή χωρίς άμεσα δεδομένα. Ως προς το περιεχόμενο χαρακτηριστικό στοιχείο αποτέλεσε η απουσία γεωμετρίας στην κατηγορία. Οι μαθητές της τρίτης κατηγορίας φάνηκε ότι κατάφεραν να ξεπεράσουν τους περιορισμούς των σχολικών εμπειριών και να περάσουν σε μεταγνωστικό επίπεδο.

Παράδειγμα

Τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών (ΑΠΣ 2002) τονίζουν τη σημασία της επίλυσης προβλήματος για την καλλιέργεια και ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Τα νέα βιβλία των μαθηματικών της Β' βαθμιαίας εκπαίδευσης που γράφτηκαν με βάση τα ΑΠΣ περιλαμβάνουν μια μεγάλη ποσότητα μαθηματικών καταστάσεων για την επίλυση προβλήματος. Πολλά από τα προβλήματα-καταστάσεις αντλούν το περιεχόμενό τους από τις καθημερινές δραστηριότητες των παιδιών και από γενικότερα ρεαλιστικά γεγονότα. Τόσο στα ΑΠΣ και στα διδακτικά πακέτα λιγότερη έμφαση δίνεται στην κατασκευή προβλημάτων από τους μαθητές-παρά το ότι η κατασκευή και η επίλυση προβλήματος συνδέονται στενά- η οποία κυρίως εμφανίζεται μέσα από τη ανάλυση του αντίστροφου ενός δοσμένου προβλήματος και τη δημιουργία προβλήματος με δοσμένους αριθμούς. Ωστόσο, στο περιβάλλον στο οποίο ζει η σύγχρονη κοινωνία αυξάνονται τα δυναμικά και σύνθετα συστήματα πληροφοριών, για παράδειγμα τα έντοκα δάνεια και οι προσφορές της τηλεφωνίας που συζητούνται καθημερινά στα ΜΜΕ. Είναι σημαντικό για τον πολίτη να μπορεί να χρησιμοποιεί διαδικασίες, όπως η αναγνώριση του είδους ενός θέματος, ο ομασμός δεδομένων και η αναπαράσταση, η δόμηση, η επεξήγηση, η αξιολόγηση, η πρόβλεψη για να μπορέσει να χειριστεί τις πληροφορίες. Τέτοιες

διαδικασίες μπορούν να καλλιεργηθούν από τα σχολικά χρόνια μέσα από τη μοντελοποίηση καθημερινών καταστάσεων (English & Watters 2005).

Η παρούσα εργασία έρχεται να υποστηρίξει αυτή τη θέση διερευνώντας στην ελληνική πραγματικότητα το πώς οι μαθητές αναγνωρίζουν μαθηματικές καταστάσεις στην καθημερινότητα αξιοποιώντας τις εμπειρίες τους από την τάξη και έξω από αυτήν.

Θεωρητικό υπόβαθρο

Η αναγνώριση μαθηματικών ιδεών και δομών σε διάφορα περιβάλλοντα σχετίζεται κυρίως με εκείνη την περιοχή της έρευνας που εξετάζει την κατασκευή και διατύπωση προβλήματος. Η διατύπωση προβλήματος απαντάται τόσο στα καθαρά όσο και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και η συμβολή του στη δημιουργία μοντέλων που μελετούν φαινόμενα του πραγματικού κόσμου είναι υψηλής σημασίας, καθώς προάγουν τη γνώση σε συγκεκριμένα πεδία. Ως εκ τούτου, τόσο η διατύπωση προβλήματος όσο και η επίλυσή του συνιστούν σημαντικά πεδία μελέτης της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο όρος «διατύπωση προβλήματος» αναφέρεται τόσο στη δημιουργία νέων προβλημάτων όσο και στον επανασηματισμό δοθέντος προβλήματος (Silver 1994). Σημαντικοί ερευνητές στο χώρο των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως οι Polyá (1954), Freudenthal (1973), έχουν αποδείξει ότι η διατύπωση προβλήματος είναι ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών. Μέχρι πρόσφατα, η έρευνα στην περιοχή αυτή αφορούσε μεγάλες τάξεις της δευτεροβάθμιας και την τριτοβάθμια εκπαίδευση (Silver et al. 1996). Τελευταία έχουν δημοσιευτεί έρευνες που αφορούν παιδιά μεγάλων αλλά και μικρών τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι περισσότερες από αυτές αναφέρονται στη δημιουργία προβλήματος με την επεξεργασία δεδομένων (Christou et al. 2005, English & Watters 2005). Ο Lowrie (2002) περιγράφει ένα είδος «ανοιχτών» προβλημάτων που μικρά παιδιά 5 έως 6 ετών δημιούργησαν μέσα σε ένα περιβάλλον υποστηρικτικό που τους παρείχε ερεθίσματα και προβλήματα και έτσι οδηγήθηκαν στο να κατανοήσουν το πώς να δημιουργούν προβλήματα από καθημερινές καταστάσεις και πώς να τα χειρίζονται. Η διαδικασία αυτή περιλάμβανε παραδείγματα που κοιτούσαν με ένα διερευνητικό μάτι την καθημερινότητα και αναζητούσαν μαθηματικές ιδέες σε φυσικό περιβάλλον. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ενώ η επίλυση προβλήματος, οι στρατηγικές και οι αλγόριθμοι φαίνεται πως έρχονται σε μια «δεύτερη μοίρα», στην πραγματικότητα η διαδικασία της κατασκευής ενός προβλήματος σε ένα πραγματικό περιβάλλον βοηθάει στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων και στην ενεργοποίηση της μαθηματικής

σκέψης που έχει αποκτηθεί και με τις παραπάνω μαθηματικές εμπειρίες (English 2002). Στις παραπάνω περιπτώσεις φαίνεται ότι η αναγνώριση μαθηματικών στο οικείο περιβάλλον των μαθητών και στην καθημερινή ζωή τους είναι προϋπόθεση για να δημιουργήσουν οι μαθητές προβλήματα και να τα λύσουν. Εν τούτοις, το πώς γίνεται αυτή η διαδικασία από τη μεριά των μαθητών δεν έχει αποτελέσει ιδιαίτερο στόχο της έρευνας. Σε αυτή την περιοχή έρχεται να συνεισφέρει γνώση η παρούσα εργασία.

Η έρευνα στην οποία στηρίζεται η παρούσα εργασία αφορά σε μαθητές Δ τάξης (10 ετών) και εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν ποιες δραστηριότητες-καταστάσεις της ζωής τους έξω από το σχολείο σε μια ορισμένη φάση, εν προκειμένω τις διακοπές του Πάσχα- έχουν μαθηματικό περιεχόμενο, να μπορούν με βάση αυτές να δημιουργούν προβλήματα και να εκπονούν στρατηγικές για να τις επιλύσουν. Η ιδέα για την έρευνα αυτή βασίστηκε στην έμφαση που δίνεται τελευταία από ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών στη σύνδεση των μαθηματικών εμπειριών που οι μαθητές βιώνουν στην τάξη και αυτών που βιώνουν στο περιβάλλον που ζουν αρκετές φορές και μέσα από αντίστοιχη υποστήριξη στο σπίτι (Hughes 2001, Winter et al. 2004).

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε δεδομένα του πρώτου μέρους της έρευνας για να απαντήσουμε στα ερωτήματα:

- με ποιους τρόπους οι μαθητές κατέγραψαν σε ημερολόγιο τις μαθηματικές καταστάσεις που αναγνώρισαν στις καθημερινές τους δραστηριότητες κατά τη διάρκεια των Πασχαλινών τους διακοπών,
- τι είδους μαθηματικά αναγνώρισαν οι μαθητές στο παραπάνω πλαίσιο.

Μεθοδολογία

Η έρευνα έλαβε χώρα στην Δ τάξη ενός κεντρικού εξατάξιου σχολείου μεγάλης επαρχιακής πόλης με 24 μαθητές, από τους οποίους 20 ανταποκρίθηκαν στο ερώτημα φέρνοντας ημερολόγιο. Οι δύο ερευνήτριες- εκ των οποίων η μία ήταν η σύμβουλος του σχολείου και η δεύτερη υπήρξε δασκάλα της τάξης την προηγούμενη χρονιά – σχεδίασαν και οργάνωσαν την έρευνα και συνεργάστηκαν με τη δασκάλα της τάξης και το Διευθυντή του σχολείου για τη διεξαγωγή της.

Ο σχεδιασμός της έρευνας περιλάμβανε δύο επίπεδα: α) αναγνώριση και καταγραφή μαθηματικών καταστάσεων από τα παιδιά σε ημερολόγιο, συζήτηση των ημερολογίων στην τάξη και β) μετατροπή των καταστάσεων σε προβλήματα και ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης στην τάξη. Η παρούσα εργασία αναφέρεται στο πρώτο μέρος του (α).

Η δασκάλα μοίρασε σχετική μονοσέλιδη επιστολή στους μαθητές λίγες μέρες πριν το Πάσχα, την οποία εξήγησε προφορικά μέσα στην τάξη. Στην επιστολή οι μαθητές ενθαρρύνονταν να ανακαλύψουν μαθηματικές καταστάσεις στις δραστηριότητές τους κατά τη διάρκεια των πασχαλινών διακοπών και να τις καταγράψουν σε ημερολόγιο και αν ήθελαν να τις ζωγραφίσουν, να βιντεοσκοπήσουν, να μαγνητοφωνήσουν ή να βγάλουν φωτογραφίες σχετικά με το θέμα. Επιπλέον, τους ζητιόταν: «Οτιδήποτε επιλέξετε να κάνετε πρέπει απαραίτητα να το συνοδεύσετε από μικρό κείμενο με τις σκέψεις σας για το τι μαθηματικά ανακαλύψατε στη συγκεκριμένη πράξη ή εικόνα». Στην ίδια επιστολή μία παράγραφος απευθυνόταν προς τους γονείς εξηγώντας τους ότι θα μπορούσαν αν ήθελαν να υποστηρίξουν τα παιδιά τους στη συγκεκριμένη δραστηριότητα αλλά διακριτικά. Επιπλέον, τονιζόταν ότι η δραστηριότητα αυτή δεν είχε ανταγωνιστικό χαρακτήρα και ήταν σύμφωνη με τη φιλοσοφία των νέων βιβλίων. Τα ημερολόγια τα έφεραν οι μαθητές στο σχολείο μετά το Πάσχα.

Οι μαθητές δεν είχαν ανάλογες προηγούμενες εμπειρίες από το σχολείο. Ωστόσο, ως μαθητές της Δ τάξης είχαν εμπειρίες από κατασκευή προβλήματος. Είχαν αντιμετωπίσει καταστάσεις όπου:

α) τους δίνονταν κάποια δεδομένα και καλούνταν να δημιουργήσουν μια σχέση ανάμεσα σε αυτά που οδηγούσε σε πρόβλημα για να το λύσουν. Για παράδειγμα, «Με τα σχήματα της εικόνας φτιάχνω μοτίβο» (Α τεύχος Τ.Ε.³. 2006, σελ.8), «Αξιοποιώντας τα παρακάτω στοιχεία, διατυπώνω ένα ή περισσότερα ερωτήματα» (Α τεύχος, Τ.Ε. 2006, σελ.18), «Με τους αριθμούς 29 και 45 διατυπώνω ένα πρόβλημα που να λύνεται με ένα πολλαπλασιασμό. Το διπλανό μου παιδί το ελέγχει, το λύνει και βρίσκει τρόπους για να επαληθεύσει το αποτέλεσμα της πράξης» (Α τεύχος Τ.Ε. 2006, σελ.27), παρόμοιο για τη διαίρεση στη σελίδα 31 του ίδιου τεύχους.

β) καλούνταν να αξιοποιήσουν συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα που συνδέονται μεταξύ τους με συγκεκριμένη σχέση μέσα σε κάποιο ρεαλιστικό πλαίσιο για να διατυπώσουν ερωτήματα και να τα απαντήσουν. Για παράδειγμα: «Η είσπραξη του εργοστασίου από την πώληση 45.000 πακέτων με χάρακες ήταν 90.000 ευρώ.

³ Τα αρχικά Τ.Ε. αναφέρονται στο Τετράδιο Εργασιών του μαθητή, ενώ τα αρχικά Β.Μ. αναφέρονται στο Βιβλίο του Μαθητή για τη Δ' τάξη.

Επίσης, το εργοστάσιο πούλησε 10.000 φωτιζόμενες υδρόγειες σφαίρες με 20 ευρώ την καθεμία. Διατυπώνω δύο ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με τη χρήση των παραπάνω στοιχείων. Το διπλανό μου παιδί επιλύει τα προβλήματα.» (Τεύχος Τ.Ε. 2006, σελ.37).

Ωστόσο, οι μαθητές της συγκεκριμένης τάξης δεν είχαν προλάβει να ασχοληθούν με εναλλακτικές δραστηριότητες της κατηγορίας (β), όπως για παράδειγμα «Επιλέγω ερώτημα που ταιριάζει και διατυπώνω αντίστροφο πρόβλημα» (Δ τεύχος, Τ.Ε. 2006, σελ.11 και σελ.19) και «Αξιοποιώ τα στοιχεία της εικόνας για να διατυπώσω ένα πρόβλημα. Το διπλανό μου παιδί το επιλύει» (Β.Μ. 2006, σελ.115).

Τα δεδομένα που αναλύονται είναι τα ημερολόγια που έφεραν τα παιδιά στην τάξη μετά τις διακοπές του Πάσχα. Η ανάλυση των δεδομένων στηρίχθηκε στη θεωρία θεμελίωσης (Grounded theory) (Strauss & Corbin 1997). Κάθε ημερολόγιο μελετήθηκε χωριστά και προσεκτικά. Υπογραμμίστηκαν λέξεις, εικόνες και πράξεις με διαφορετικό τρόπο. Η μελέτη ανέδειξε κοινά χαρακτηριστικά των ημερολογίων που είχαν σχέση με τη μορφή που οι μαθητές επέλεξαν για να παρουσιάσουν τις μαθηματικές καταστάσεις, καθώς και το μαθηματικό περιεχόμενο με το οποίο συνδέονται αυτές οι καταστάσεις. Μέσα από την ομαδοποίηση των κοινών χαρακτηριστικών αναδείχτηκε μια σειρά από κατηγορίες, οι οποίες απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα. Οι κατηγορίες αυτές παρουσιάζονται και συζητούνται στις επόμενες ενότητες.

Αποτελέσματα

Μορφή των μαθηματικών καταστάσεων στα ημερολόγια των παιδιών

Διακρίναμε τρεις κυρίως κατηγορίες για τις μορφές με τις οποίες παρουσιάζονται οι μαθηματικές καταστάσεις στα ημερολόγια των παιδιών.

1. Οι μαθητές της κατηγορίας αυτής διατύπωσαν λεκτικά προβλήματα ανάλογα με αυτά που έχουν συναντήσει στα σχολικά τους βιβλία. Αυτά περιλάμβαναν: διατύπωση προβλήματος, διατύπωση σκέψης και λύση με πράξεις οριζόντιες ή κάθετες και μερικές φορές απάντηση (4 μαθητές). Για παράδειγμα, η Δ. έγραψε «Μια μέρα πήγα στο περίπτερο για να αγοράσω το Focus Junior. Είχα μαζί μου 10 ευρώ και το Focus έκανε 3 ευρώ. Έδωσα τα 10 και ο περιπτεράς μου έδωσε 7 ευρώ ρέστα. Σκέψη: Για να βρω πόσα ρέστα θα μου έδινε ο περιπτεράς έκανα αφαίρεση. Από τα 10 ευρώ που έδωσα στον περιπτερά αφάιρεσα 3 που κόστιζε το περιοδικό και μου έμειναν 7 ευρώ...». Η Κ. έγραψε προβλήματα όπως το ακόλουθο: «Την Μ. Πέμπτη πήγα μαζί με τη μαμά μου και τη φίλη της μαμάς μου για φαγητό. Εγώ πήρα γαρίδες τηγανιτές που έκαναν 6,20 ευρώ. Η μαμά πήρε ένα γαριδοπίλαφο που

έκανε 8,40 ευρώ. Η φίλη της μαμάς μου πήρε μία μερίδα καλαμαράκια που έκαναν 5,10 ευρώ. Πόσα ευρώ πληρώσαμε;»

2. Οι μαθητές της κατηγορίας αυτής που ήταν και οι περισσότεροι (9 μαθητές) χρησιμοποίησαν αφηγηματικό λόγο και περιέγραψαν καθημερινές μαθηματικές καταστάσεις. Στην προσπάθειά τους να αποδείξουν ότι οι καταστάσεις ήταν μαθηματικές χρησιμοποίησαν αριθμούς που σχετίζονταν ρεαλιστικά με τις καταστάσεις διατυπώνοντας προβλήματα στα οποία έδιναν «απαντήσεις» χωρίς να διατυπώνουν ερωτήματα. Για παράδειγμα, η Γ. έγραψε : «Εγώ είμαι 1 μέτρο και 41 εκατοστά και η μαμά μου είναι 1 μέτρο και 63 εκατοστά, η διαφορά ανάμεσά μας είναι 22 πόντοι, οπότε εγώ υπολόγισα ότι για να φτάσω τη μαμά μου θέλω ακόμα 22 πόντους». Η Β. έγραψε: «Κατά τη διάρκεια των διακοπών του Πάσχα μου συνέβησαν πολλές μαθηματικές καταστάσεις. Τη Μεγάλη Εβδομάδα πήγαμε μια εκδρομή με πούλμαν. Δώσαμε 1000 ευρώ συνολικά και μας έδωσαν ρέστα 400 ευρώ. Η μητέρα με κέρασε παγωτό...» κ.λπ. Η Δ.Τ. ξεκίνησε τη διήγησή της «Φέτος το Πάσχα πήγαμε στο χωριό. Ξεκινήσαμε στις 10.30...» συνεχίζοντας την ιστορία των διακοπών με αριθμούς τους οποίους υπογράμμιζε για να τονίσει τη σχέση της ιστορίας με τα μαθηματικά.

3. Οι μαθητές της κατηγορίας αυτής (6 μαθητές) αναφέρθηκαν σε μαθηματικές καταστάσεις που ήταν πιο ανοιχτές. Διακρίθηκαν τρεις υποκατηγορίες:

α) Οι Ε., Σ., Β., Χ.Γ. δεν διατύπωσαν ερωτήματα αλλά χρησιμοποίησαν εκφράσεις που δηλώνουν ή υποδηλώνουν πράξεις. Για παράδειγμα, η Χ.Γ. έγραψε: « *Η έκπτωση κρύβει τη μαθηματική πράξη της αφαίρεσης*». Ο Β. αναφερόμενος σε καταστάσεις στο μαγαζί του πατέρα του που πουλάει νυφικά έγραψε: «πρέπει να δώσει προκαταβολή...Έρχεται να πάρει το νυφικό και πληρώνει τα υπόλοιπα χρήματα...»

β) Ο Χ.Τ. περιέγραψε καταστάσεις πλούσιες σε μαθηματικά δεδομένα με χαρακτηριστικό την ανάδειξη ερωτημάτων, μαθηματικών στοιχείων που θα βοηθούσαν στην απάντηση την οποία δεν δίνει άμεσα, όπως για παράδειγμα: «Το πρόβλημα που έπρεπε να λύσω ήταν: πόσα μέτρα κάγκελα θα χρειαστούμε για την περίφραξη του οικοπέδου μας. Ο μπαμπάς μου είπε: «Μπορείς να το υπολογίσεις;». Εγώ απάντησα ότι δεν ήξερα το μήκος των πλευρών. Ο μπαμπάς είπε πως είναι ορθογώνιο 20x25. Στο σχολείο μάθαμε πρόσφατα τον υπολογισμό της περιμέτρου, απλά το εφάρμοσα».

γ) Η Α. αναφέρθηκε σε καταστάσεις, οι οποίες αναδείκνυαν ερωτήματα και οι απαντήσεις έρχονταν με φυσικό τρόπο ως μέρος των καταστάσεων, μέρος της διήγησης «Ο μπαμπάς χρειάστηκε να τοποθετήσει 5 λάμπες. Ζήτησε τη βοήθειά μου. Είχαμε ένα καλώδιο που το μέτρησα και ήταν 205 εκατοστά ή 2 μέτρα και 5

εκατοστά. Ο μπαμπάς μου ζήτησε να το κόψουμε σε 5 ίσα κομμάτια. Σκέφτηκα πως για να κόψω κάτι σε ίσα κομμάτια κάνω διαίρεση, άρα κάθε κομμάτι έπρεπε να είναι 41 εκατοστά. Πήρα λοιπόν το μέτρο και σημάδεψα το καλώδιο ανά 41 εκατοστά»

Ιδιαίτερη περίπτωση που δεν ανήκει σε καμιά από τις παραπάνω κατηγορίες αποτέλεσε η Α.Κ. που ζωγράφισε, διατύπωσε και έλυσε λεκτικά προβλήματα αριθμητικής επιπέδου πρώτης δημοτικού με μονοψήφιους αριθμούς, όπως για παράδειγμα: «Στην εικόνα βλέπω 6 κόκκινες παπαρούνες και 6 κίτρινες παπαρούνες, δηλαδή $6+6 = 12$ παπαρούνες.»

Μαθηματικό περιεχόμενο των μαθηματικών καταστάσεων στα ημερολόγια

1. Στην πρώτη κατηγορία οι μαθητές διατύπωσαν λεκτικά προβλήματα κυρίως αριθμητικής που αφορούσαν σε χρήματα και αγοροπωλησίες και λύνονταν με τις 4 πράξεις της αριθμητικής. Μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης είχαν οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και μικρότερη συχνότητα οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Οι αγοροπωλησίες λάβαιναν χώρα σε καταστήματα, όπως για παράδειγμα: «Τη Μεγάλη Τετάρτη πήρα από το ζαχαροπλαστείο 5 λουκουμάδες που έκαναν 270 λεπτά. Πόσο έκανε ο ένας;» (ημερολόγιο της Κ.), και σε άλλους χώρους, όπως για παράδειγμα βενζίνη και πλύσιμο αυτοκινήτου (ημερολόγιο του Α.), κουζίνα και μαγειρική «7 λουκάνικα σε φέτες των 8, πόσα λουκάνικα δημιουργούνται (ημερολόγιο της Κ.).

2. Στη δεύτερη κατηγορία οι μαθητές περιέγραψαν καταστάσεις που ανήκαν και στη γεωμετρία (4 μαθητές) και στην αριθμητική (και οι 9 μαθητές).

Σε σχέση με τη γεωμετρία οι Γ.Π. και Α.Π. ασχολήθηκαν με το γεωμετρικό σχήμα, χαρακτηριστικά γεωμετρικών σχημάτων, μέτρηση μήκους και σύγκριση μηκών, γεωμετρικά στερεά, όπως για παράδειγμα: «Εγώ έχω παρατηρήσει ότι το ταβάνι του δωματίου μου είναι πολύγωνο και έχει πολλές πλευρές και πολλές ορθές γωνίες» (ημερολόγιο της Α.Π.), «Πρόσεξα ότι το παράθυρο της σκάλας είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αυτό είναι ένα γεωμετρικό σχήμα» (ημερολόγιο της Α.Π.),

η Ρ. με το γεωμετρικό σχήμα, όπως για παράδειγμα «Τα παρτέρια με τα λουλούδια είχαν σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο...Τα συντριβάνια έχουν σχήμα κύκλου...»

η Ε.Θ. με εμβαδόν, μέτρηση μήκους, πλάτους, ύψους, όπως για παράδειγμα η κατάσταση που αφορούσε τη μοκέτα που ήθελε η γιαγιά να αγοράσει για την κουζίνα της «...Εγώ υπολόγισα το εμβαδόν του δωματίου. Μέτρησα με το μέτρο

και βρήκα ότι το πλάτος ήταν 2 μ. και το μήκος 3 μ. Άρα, το εμβαδόν της κουζίνας είναι 6 τ.μ. επειδή $3 \mu. \times 2 \mu. = 6 \tau.μ...$ »

Σε σχέση με την αριθμητική και οι 9 μαθητές της κατηγορίας αυτής περιέγραψαν καταστάσεις με χρήματα και αγοροπωλησίες, όπως για παράδειγμα «Με τη μαμά μου βγήκαμε για ψώνια στα μαγαζιά και είχαμε πάρει 100 ευρώ. Η μαμά μου πήρε δύο μπλούζες που έκαναν 40 ευρώ και ένα παντελόνι που έκανε 30 ευρώ. Στο ταμείο έδωσε 100 ευρώ και πήρε ρέστα 30 ευρώ. Με τα ρέστα που πήρε από το μαγαζί πήγαμε να πάρω μια ζακέτα και μια μπλούζα που έκαναν 20 ευρώ και πήραμε ρέστα 10 ευρώ. Με τα 10 ευρώ πήραμε 2 πίτσες και μια μακαρονάδα φούρνου.» (ημερολόγιο της Ν.), «Τη Μεγάλη Πέμπτη πήγα στο φούρνο για να αγοράσω 2 καρβέλια ψωμί. Το ένα καρβέλι κόστιζε 60 λεπτά. Εγώ έδωσα και για τα δύο 2 ευρώ. Τότε σκέφτηκα ότι και τα δύο κάνουν 1,2 ευρώ και άρα θα πάρω ρέστα 80 λεπτά, επειδή $2 - 1,2 = 0,80$ ευρώ» (ημερολόγιο της Ε.Θ.).

Επιπλέον με τα παραπάνω η Δ.Τ. περιέγραψε καταστάσεις που αφορούσαν σε χρόνο, όπως για παράδειγμα «...ξεκινήσαμε στις 10.30 της Μεγάλης Παρασκευής, στο χωριό φθάσαμε στις 4.05...» και σε απαρίθμηση «...θα το πιστέψετε μέτρησα 11 καφετέριες που η καθεμία είχε γύρω στα 15-20 τραπέζια...»

Η Α. Π. εκτός από καταστάσεις με χρήματα, αγοροπωλησίες και μέτρηση μεγέθους (χρόνο) ασχολήθηκε και με κλάσματα, όπως για παράδειγμα: «Μια μέρα ο μπαμπάς έκοψε το πορτοκάλι σε 6 κομμάτια και εγώ έφαγα το ένα έκτο, δηλαδή το ένα κομμάτι από τα έξι».

Η Ε.Θ., εκτός από καταστάσεις με αγοροπωλησίες και πράξεις ακεραίων, μετρήσεις μεγεθών (χρόνο, βάρος) ασχολήθηκε και με αναλογίες, όπως για παράδειγμα η ιστορία για τα πασχαλινά κουλούρια, όπου η μαθήτρια αναφέρθηκε αναλυτικά στα υλικά και στο πώς διπλασίασε τη «δόση»: «ζύγισα λοιπόν 1 κιλό αλεύρι, 350 γρ. ζάχαρη...διπλασίασα τις ποσότητες των υλικών κι έτσι χρειαστήκαμε 2 κιλά αλεύρι, 700 γρ.ζάχαρη...)

3. Στην τρίτη κατηγορία οι μαθητές ασχολήθηκαν με καταστάσεις που πραγματεύονταν έννοιες της γεωμετρίας (3 μαθητές) και της αριθμητικής όλοι οι μαθητές.

Σε ό,τι αφορά τη γεωμετρία, η Χ.Γ. αναγνωρίζει γεωμετρικά σχήματα σε καθημερινά αντικείμενα: «Ο χαρταετός έχει σχήμα ρόμβου και ο σταυρός είναι δύο τεμνόμενες ευθείες», «πολλά αντικείμενα γύρω μας παρατηρώ ότι είναι γεωμετρικά σχήματα ... β) Η ρόδα του ποδηλάτου είναι κύκλος γ) τη Μ. Πέμπτη παρατήρησα ότι ο σταυρός σχηματίζει τέσσερις ορθές γωνίες ..., ενώ οι Α. και Χ.Τ. ασχολούνται με μέτρηση μήκους η πρώτη και υπολογισμό εμβαδού και οι δύο,

όπως για παράδειγμα «...η επιφάνεια που θέλαμε να καλύψουμε ήταν 2,5 μ. x 3,00 μ. Σκέφτηκα πόσο εύκολο είναι τελικά να συνδυάσεις αυτά που μαθαίνεις με την καθημερινή ζωή. Υπολόγισα το εμβαδόν 7,5 μ²» (Ημερολόγιο του Χ.Τ.).

Σε ό,τι αφορά την αριθμητική οι μαθητές ασχολήθηκαν με αναλογίες, κλάσματα, όπως για παράδειγμα: «Η συνταγή της γιαγιάς ήταν για μια δόση κουλούρια. Εμείς θα φτιάχναμε τρεις δόσεις. Σκέφτηκα λοιπόν να πολλαπλασιάσω τα υλικά της μίας δόσης επί το τρία» (ημερολόγιο της Χ.Τ.), «Η θεία μου μου ζήτησε να ετοιμάσω το γάλα για το μωρό. Μου είπε απλά: στα 30 ml νερό βάζουμε 1 μεζούρα γάλα σε σκόνη. Φτιάξε 120 ml» (ημερολόγιο του Χ.).

Όλοι οι μαθητές αυτής της κατηγορίας έθιξαν θέματα που σχετίζονταν με πράξεις ακεραίων άμεσα, όπως για παράδειγμα: «...βάψαμε συνολικά 20 αυγά και τα μοιράσαμε σε 2 αυγοθήκες που η καθεμιά χωρούσε 10 αυγά...» (ημερολόγιο της Χ.Γ.), «Το βάρος του κάθε ρολού είναι 129 γρ. Άρα, το βάρος όλης της συσκευασίας είναι $129 \times 10 = 1290$ γρ., δηλαδή 1 κιλό και 290 γρ.» (ημερολόγιο της Α.).

ή έμμεσα, όπως για παράδειγμα: «Ανέλαβα τα ψώνια του σπιτιού. Έτσι, πηγαίνοντας καθημερινά στο σουπερ μάρκετ είχα να αντιμετωπίσω τα εξής προβλήματα: 1. αν τα χρήματα έφταναν 2. έπρεπε να υπολογίσω σωστά τα ρέστα...» (ημερολόγιο του Σ.).

με μέτρηση μεγεθών (χρόνο) και απαρίθμηση, όπως για παράδειγμα: «...Οι ημέρες του Πάσχα ξεκίνησαν από το Σάββατο του Λαζάρου για μένα. Δεκαπέντε ημέρες είχα διακοπές. Τις πρώτες εφτά πήγαινα εκκλησία και τις άλλες οχτώ είχα ελεύθερο χρόνο να παίζω...» (ημερολόγιο του Ε.).

Συζήτηση

Η παρούσα εργασία εξετάζει τους τρόπους με τους οποίους δεκάχρονοι μαθητές μιας τάξης κατέγραψαν τις μαθηματικές καταστάσεις που αναγνώρισαν κατά τη διάρκεια των πασχαλινών τους διακοπών. Το ερώτημα που τέθηκε στους μαθητές ήταν αρκετά ανοιχτό εφόσον δεν δόθηκαν στοιχεία που θα μπορούσαν να κατευθύνουν τους μαθητές προς συγκεκριμένους τρόπους ανταπόκρισης στο ερώτημα, όπως για παράδειγμα τι εννοούμε λέγοντας «μαθηματική κατάσταση» ή κάποια συγκεκριμένη φόρμα συμπλήρωσης. Αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης ήταν οι μαθητές να έχουν περιθώρια δράσης και αυτενέργειας, όπως φάνηκε στα ημερολόγιά τους. Ανακάλυψαν μαθηματικές έννοιες και δομές σε ένα πλήθος από διαφορετικές καταστάσεις της καθημερινότητάς τους. Από την άλλη, αρκετοί μαθητές δεν αρκέστηκαν στο να αναγνωρίσουν και να καταγράψουν απλώς αυτές τις καταστάσεις αλλά θεώρησαν απαραίτητο και προχώρησαν στην κατασκευή προβλημάτων, στη διατύπωση σκέψης, δηλαδή στρατηγικής επίλυσης του

προβλήματος, στην εκτέλεση πράξεων ή καταγραφή υπολογισμών και στη διατύπωση απάντησης στα ερωτήματα που έθεσαν.

Η διαβάθμιση των κατηγοριών έγινε με κριτήριο το πόσο ανοιχτή ήταν η διατύπωση μιας μαθηματικής κατάστασης και κατά πόσο διαφοροποιούνταν από αντίστοιχες του βιβλίου, γεγονός που έδειχνε εάν ο μαθητής είχε και σε ποιο βαθμό περάσει σε μια μεταγνωστική διαδικασία. Αυτό σήμαινε ότι ο μαθητής με αυτά τα χαρακτηριστικά είχε ξεπεράσει τις εμπειρίες του που προέρχονταν από την επίλυση προβλημάτων του βιβλίου διότι είχε κατανοήσει ότι για να δημιουργηθεί ένα πρόβλημα χρειαζόταν να αναζητηθούν μετρήσιμα δεδομένα σε γεγονότα ή καταστάσεις. Επομένως, αυτό που χρειαζόταν να κάνει ήταν να ψάξει στην καθημερινότητά του για δεδομένα και να περιγράψει το πού και το πώς χωρίς απαραίτητα να νιώθει την ανάγκη να αποδείξει αυτή του τη γνώση μέσα από τη διατύπωση συγκεκριμένων προβλημάτων. Σε όλες τις κατηγορίες φάνηκε ότι οι μαθητές ενδιαφέρονταν ή είχαν την ανάγκη για την εξαγωγή ενός συμπεράσματος ή ενός αποτελέσματος.

Τα παιδιά της πρώτης κατηγορίας διατύπωσαν προβλήματα στην προσπάθειά τους να αποδείξουν ότι γνώριζαν να διακρίνουν ποιες είναι μαθηματικές καταστάσεις από τα γεγονότα που αντιμετωπίζουν στην καθημερινή τους ζωή. Τα προβλήματα που διατύπωσαν είχαν αρκετά κοινά στοιχεία με τα είδη των προβλημάτων που είχαν αντιμετωπίσει στο σχολείο και η επίλυσή τους είχε τη συνήθη σχολική δομή (σκέψη-πράξεις-απάντηση). Η διαπίστωση αυτή συμφωνεί με σχετικές έρευνες που έχουν δείξει ότι οι μαθητές έχουν την τάση να διατυπώνουν προβλήματα που αντικατοπτρίζουν τις σχολικές τους εμπειρίες ή προβλήματα που είναι απλά παραλλαγές των προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου (Lowrie 2002, Christou et al. 2005). Επιπλέον, τα προβλήματα που διατυπώθηκαν αφορούσαν αποκλειστικά την αριθμητική, όπου μπορούσαν να έχουν «καθαρές» μαθηματικές λύσεις αντλούμενες από αυτές που είχαν διδαχθεί (Silver et al. 1996). Από την άλλη, φαίνεται πως δεν ασχολήθηκαν με τη γεωμετρία πιθανόν γιατί δεν αναγνώρισαν γεωμετρικές έννοιες στην καθημερινότητά τους εφόσον η γεωμετρία προϋποθέτει φαντασία που ξεφεύγει από τετριμμένες αριθμητικές πράξεις.

Οι μαθητές της δεύτερης κατηγορίας περιέγραφαν αρχικά τη μαθηματική κατάσταση που συνδεόταν με συγκεκριμένο γεγονός και κατόπιν ή κατέληγαν σε συμπερασματικές κρίσεις του τύπου «αυτό είναι γεωμετρικό σχήμα...», «αυτό είναι μαθηματική πράξη...» ή διατύπωναν προβλήματα με αφηγηματικό λόγο άλλοτε παραθέτοντας και άλλοτε όχι τη μαθηματική πράξη. Οι μαθητές αυτοί είχαν προχωρήσει ένα βήμα παραπέρα από τις εμπειρίες του σχολικού εγχειριδίου συνδέοντας καταστάσεις και διατύπωση προβλήματος μέσα από την αναγνώριση δεδομένων. Η διαπίστωση αυτή ενισχύεται και από το ότι οι

μαθητές αυτοί ασχολήθηκαν και με έννοιες της γεωμετρίας, χωρίς ωστόσο να ξεφεύγουν από τους περιορισμούς του αναλυτικού προγράμματος της συγκεκριμένης τάξης. Οι πράξεις που αρκετές φορές εμφανίστηκαν για να υποστηρίξουν την ορθότητα της διατύπωσης του προβλήματος φάνηκε ότι προϋπήρχαν στη σκέψη των μαθητών και χρησιμοποιήθηκαν αφού είχε διαπιστωθεί ότι κατέληγαν σε κάποιο αποτέλεσμα.

Οι μαθητές της τρίτης κατηγορίας περιέγραψαν καθημερινές καταστάσεις στις οποίες εντόπιζαν μαθηματικά δεδομένα είτε σε σχέση με την αριθμητική είτε με τη γεωμετρία χωρίς να το αποδεικνύουν οπωσδήποτε. Μερικές φορές χρησιμοποίησαν αριθμητικά δεδομένα και σε δύο περιπτώσεις προχώρησαν και σε εκτέλεση πράξης που προέκυπτε ως μια φυσική συνέπεια της αφήγησής τους, όπως στην περίπτωση της Α. που εκτέλεσε σε μια άκρη του κειμένου τη διαίρεση κάνοντάς την να φαίνεται μέρος της διήγησής της. Οι μαθητές αυτοί έδειξαν ότι έχουν αυτονομηθεί σε μεγάλο βαθμό ο καθένας με το δικό του τρόπο από τις σχολικές εμπειρίες και ότι θα μπορούσαν με κατάλληλη υποστήριξη (Lowrie 2002) να προχωρήσουν στη διατύπωση ανοιχτών προβλημάτων.

Η συνέχιση της έρευνας για την εκπλήρωση του δεύτερου στόχου θα μπορούσε να συνεισφέρει στην επιβεβαίωση των παραπάνω διαπιστώσεων.

Βιβλιογραφία

- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α. Δ., Σαΐτης, Α. (2006). *Μαθηματικά Δ Δημοτικού*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. & Stiraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, Vol. 37 (3), 149-158.
- Corbin, J & Strauss A. (1996). *Basics of Qualitative Research, Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. London: Sage.
- English, L.D. (2002). Development of 10-years-olds' mathematical modeling. In A.Cockburn & E.Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International PME Conference* (pp.329-336). Norwich: PME.
- English, L.D & Watters, J.J. (2005). Mathematical Modelling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, Vol.16, (3), 58-79.
- Freudenthal, J. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dodrecht, Netherlands: Reidel.
- Hughes, M. (2001). Linking home and school mathematics. In M.van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p.5-8). Utrecht: PME.
- Lowrie, T. (2002). Designing a Framework for Problem Posing: young children generating open-ended tasks. *Contemporary Issues in Early Childhood*, Vol.3, (3), 354-364.
- Polyá, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

- Silver, E.A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14, (1), 19-28.
- Silver, E.A., Mamona-Downs, J., Leung, S.S. & Kenney, P.A. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.27, (3), 293-309.
- Strauss, A. & Corbin, J. (1997). *Grounded Theory in Practice*, London: Sage.
- Τετράδιο Εργασιών Δ' Τάξης Δημοτικού (2006). Α', Β', Γ, Δ' τεύχος. ΥΠΕΠΘ:ΟΕΔΒ.
- ΥΠΕΠΘ & Π.Ι. (2002). *Τα νέα ΑΠΣ και ΔΕΠΠΣ*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Winter, J., Salway, L., Ching Yee, W. & Hughes, M. (2004). Linking home and school mathematics: The home school knowledge exchange project. In O. McNamara & R. Barwell (Eds.) *Research in Mathematics Education*, vol.6, p.59-75.

